

L'attracteur d'un photocopieur

Bernard Vuilleumier

<http://Hypatie.ge.ch>

Centre pédagogique des technologies de l'information et de la communication (CPTIC)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur: Raymond Morel

Lettre n° 173

Si un photocopieur réduit la taille de l'original, alors il possède un attracteur

L'attracteur s'obtient en photocopiant la copie, puis la copie de la copie, etc.

Lorsque l'image ne se modifie plus d'une copie à la suivante, l'attracteur est atteint

L'attracteur ne dépend que des transformations opérées lors de la copie. C'est le même quel que soit l'original!

Imaginez un photocopieur un peu particulier: au lieu d'un seul système optique, il en possède plusieurs. Chaque jeu de lentilles produit une image réduite du document original. La copie comporte alors autant d'images réduites que le photocopieur possède de systèmes optiques. Si vous photocopiez la copie, puis la copie de la copie, ... vous finirez par obtenir une image qui ne se modifie plus. Et, plus étonnant encore, cette image finale est la même quelle que soit celle figurant sur l'original! Cette image finale s'appelle «l'attracteur» du photocopieur.



Fig. 1: Un document initial comporte 4 rectangles (image de gauche). On le copie avec un photocopieur possédant 5 systèmes optiques. On compte sur la copie $4 \cdot 5$ rectangles. Si on photocopie la copie on obtient $4 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5^2$ rectangles. Après plusieurs passages, l'image obtenue ne se modifie plus.



Fig. 2: L'image finale, appelée « attracteur », est indépendante de l'image initiale. L'attracteur est atteint lorsque la résolution du photocopieur ne permet plus de distinguer une copie de la suivante.

Les images obtenues peuvent être étirées ou rétrécies. Elles peuvent subir des rotations et des rabattements. Mais, au cours de ces transformations, les lignes droites restent des lignes droites et les parallèles demeurent parallèles. En termes mathématiques, chaque système optique du photocopieur effectue une transformation affine du plan. Pour qu'un photocopieur – quel que soit le nombre de ses systèmes optiques – possède un attracteur et que celui-ci soit unique, il suffit que chaque système de lentilles produise une *image réduite* de l'image initiale.



Fig. 3: Attracteurs de photocopieurs à 3, 4 et 5 systèmes optiques, respectivement de gauche à droite.

Les attracteurs présentent en général des propriétés d'auto-similarité: ils contiennent de petites répliques de la figure qu'ils forment. Ils relèvent à ce titre, de la géométrie fractale.

Prochaine réunion: lundi 2 décembre 2002 à 17 h.

Travaux pratiques

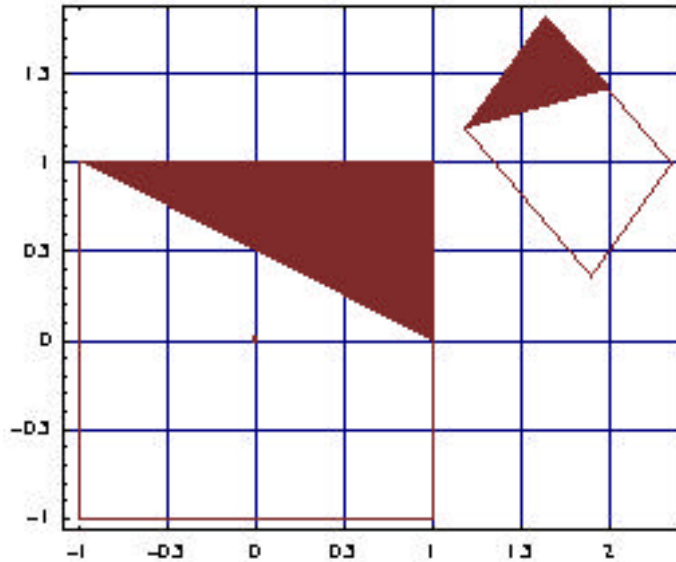
Mots clefs

Attracteur, itération, photocopieur, système de fonctions itérées (IFS), transformation affine.

Pour trouver les coefficients d'une transformation affine

Exercice 1

Construisez le carré ci-dessous centré sur l'origine et trouvez la transformation affine permettant d'obtenir, à partir de cette figure, l'image de droite.



Pour réitérer l'application d'un ensemble de transformations

Exercice 2

On donne quatre transformations affines w_i par leurs coefficients a, b, c, d, e, f

	a	b	c	d	e	f
w_1	0.68	0.03	0.05	0.78	0.17	0.33
w_2	-0.38	0.42	0.23	0.47	0.87	0.05
w_3	0.15	-0.22	0.23	0.31	0.50	0.05
w_4	0.21	0	0	0.33	0.46	0.01

Réitérez plusieurs fois l'application de ces transformations en partant d'images originales différentes. Cette démarche permet-elle d'obtenir l'attracteur des transformations?

Pour obtenir l'attracteur d'un ensemble de transformations

Exercice 3

Un photocopieur possède quatre systèmes optiques. Sur la copie d'une image originale on trouve quatre images réduites et transformées selon les transformations affines de l'exercice 2. Dessinez l'attracteur de ce photocopieur.

Pour en savoir plus

• Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe, *Fractals for the Classroom*, (2 volumes), Springer-Verlag, New-York 1992.